Μαθημα 6ο 26/10/2017

Διαφ. Εξ.

Ασκηση 2, iii σελιδα 41

→ Ειναι γραμμενη στη μορφη Leibnitz (χωριζ. μετ.)

$(\underbrace{xy^2+y^2+x+1}_{y^2(x+1)+(x+1)})dx + (y-1)dy = 0$, $y(2)=0$

$(y^2+1)(x+1)dx + (y-1)dy = 0 \Rightarrow$

$(x+1)dx = -\dfrac{y-1}{y^2+1}dy \Rightarrow$

$\int (x+1)dx = -\int \dfrac{y-1}{y^2+1}dy \Rightarrow$

$c + \dfrac{x^2}{2} + x = -\int \dfrac{y}{y^2+1}dy + \int \dfrac{1}{y^2+1}dy \Rightarrow$

$\dfrac{x^2}{2} + x + c = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan y$

Π.Α.Τ $y(2)=0$

πραξεις ... $4+c=0 \Rightarrow c=-4$

Εχουμε $\dfrac{x^2}{2} + x - 4 = -\log\sqrt{y^2+1} + \arctan y$

Ομογενεις Εξισωσεις

$y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ με f, g : ομογ. ιδιου βαθμου

Μετασχηματισμος $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xz$ και $y' = xz' + z$

$\Rightarrow$ Βιβλιο

Ασκηση 5 ;iii; Ισελίδα 41-42

$$(x-y+3)dx = (x+2y-3)dy$$

$$\frac{x-y+3}{x+2y+3} = \frac{dy}{dx}$$

Λυνω το συστημα

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \begin{cases} y_0=2 \\ x_0=-1 \end{cases}$$

Εχω $X = x+x_0 \Rightarrow X = x-1$

$Y = y+y_0 \Rightarrow Y = y+2$

Αρα $\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+2Y}$

αν βαλω $z = \frac{Y}{X}$ βγαινει $\frac{1+2z}{1+2z^2} dz = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow$

$$\int \frac{1+2z}{1+2z^2} dz = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+2z^2} dz + \int \frac{2z}{1+2z^2} dz = -\ln x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2 + z^2} dz + \frac{1}{2} \int \frac{4z}{1+2z^2} dz = -\ln x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \, Arctg(\sqrt{2} \cdot z) + \frac{1}{2} \log(1+2z^2) = -\ln x + C$$

Αρα $\sqrt{2} \, Arctg\left(\sqrt{2} \cdot \frac{Y-2}{X+1}\right) + \log\left[\left(1+2\left(\frac{Y-2}{X+1}\right)^2\right) X^2\right] = 2C$

(δε θελω ενωση διαστηματων) !

→ $f(ax+by+c) = y'$

θετω $z = ax+by+c$ αρα $z' = a + by'$

οποτε

$$f(z) = \frac{z'-a}{b} \Rightarrow z' = bf(z) + a \Rightarrow \frac{z'}{bf(z)+a} = 1$$

παραδειγμα

$y' = \sqrt{x+y+1} - 1$ θελω περιορισμο αφου εχω ριζα

αρα $x+y+1 \geq 0$

θετω $z = x+y+1$ αρα $z' = 1+y'$ ⇒ $y' = z'-1$

$y' = z-1 \Rightarrow z'-1 = \sqrt{z} - 1 \Rightarrow z' = \sqrt{z}$

1) $z = 0$

2) $z' \neq 0$: $z(x) = 2\sqrt{z} + C$

αρα εχω $x+y+1 = 2\sqrt{x+y+1} + C$

λυνω και βρισκω: $y(x) = \frac{(x+C)}{y} - (x+1)$ γενικη λυση

ιδιαζουσα : $z = 0$

Πεδια ορισμου να βρω σπιτι !

$\frac{dy}{dx}$

Ακριβα διαφορικες διαφ. εξ.

$y' = f(x,y)$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\frac{df}{dx} = M(x,y) \quad , \quad \frac{df}{dy} = N(x,y)$

$$df = \underset{\Downarrow}{\frac{df}{dx} dx} + \underset{\Downarrow}{\frac{df}{dy} dy}$$

$$M(x,y)dx \qquad N(x,y)dy$$

αρα γραφω $\quad M(x,y)dx + N(x,y) = 0$

$df = 0 \Rightarrow f(x,y) = c$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

θυμαμαι παντα

$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$

Τυπος: $\boxed{\begin{gathered} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \end{gathered}}$

Ασκηση 2 ii | σελιδα 48

$$(\underbrace{ye^{xy} + 2x}_{M})dx + (\underbrace{xe^{xy} - 2y}_{N})dy = 0 \quad , \quad y(0) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= e^{xy} + xye^{xy} \\ \frac{dN}{dy} &= e^{xy} + yxe^{xy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y)$$

$$= \int (ye^{xy} + 2x)dx + h(y)$$

$$= \frac{y}{x} e^{xy} + x^2 + h(y) = e^{xy} + x^2 + h(y)$$

$$N(x,y) = \frac{df}{dy} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + x^2 + h(y)) = xe^{xy} + h'(y)$$

$$xe^{xy} - 2y = xe^{xy} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + C$$

$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^2 + c$

$y(0)=2$ τοτε θα βρω C : $1 + 0 - 4 = C \Rightarrow C = -3$

$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \varphi(x) = \int (xe^{xy} - 2y)\,dy + \phi(x)$

$\Rightarrow f(x,y) = (e^{xy} - y^2 + \phi(x)) = e^{xy} + x^2 + h(y)$

$\Rightarrow \phi(x) - x^2 = h(y) + y^2 \quad // \quad h(y) = -y^2, \ \varphi(x) = x^2$

Ασκηση 8 Ισελιδα 45

Να βρεθουν οι f ωστε η εξισωση

$\overset{M}{y^2 \sin x}\,dx + \underset{N}{y f(x)}\,dy = 0$

και να επιλυθει ...

θελω $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial (y^2 \sin x)}{\partial y} = \dfrac{\partial (y f(x))}{\partial x} \Rightarrow$

$2y \sin x = y f'(x) \overset{y \neq 0}{\Rightarrow} 2\sin x = f'(x) \Rightarrow f(x) = -2\cos x + C$

Αρα

$y' \sin x\,dx + y'(c - 2\cos x)\,dx = 0$

$f(x,y) = \int y^2 \sin x\,dx + h(y)$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$\overbrace{p(x,y)\,M(x,y)}^{M_1}\,dx + \overbrace{p(x,y)\,N(x,y)}^{N_1}\,dy = 0$

• Αν $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = P(x) \rightarrow p(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

• Αν $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = P(y) \rightarrow p(y) = e^{\int P(y)\,dy}$

Άσκηση 3i, σελίδα 42

$\underbrace{xy}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2+y^2+y)}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Έχουμε τώρα

$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \ldots$

Γίνεται λοιπόν:

$xy^2\,dx + (x^2y + y^3 + y^2)\,dy = 0$

$f(x,y) = \int xy^2 + h(y) = \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \Rightarrow x^2y + y^3 + y^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + h'(y)$

$\Rightarrow h'(y) = y^3 + y^2 \Rightarrow h(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + c$

$f(x,y)=A$

$\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}+C_0=A$

$\underbrace{\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}}_{f(x,y)}=C$ με $C=A-C_0$

Ασκηση 6

$(4x^{-4}y^2-2x^{-2}y)dx+(3x^{-3}y+y^{-1})dy=0$

Να βρεθεί ολοκλ. παράγοντας της μορφής $\rho(x,y)=x^my^n$, $n,m\in\mathbb{Z}$

Πολλ/ζω με x^my^n τότε έχω

$x^my^n(4x^{-4}y^2-2x^{-2}y)dx+x^my^n(3x^{-3}y+y^{-1})dy=0$

Άσκηση 3 φυλλάδιο 2

$y' = |x-y|$, $y(0)=1$, $x \geq 0$

i) $x \geq y$

$y' = x - y$

$y' + y = x$

Άρα γενική λύση

$$y(x) = e^{-\int_0^x 1 ds} \left[1 + \int_0^x s e^{\int_0^s 1 du} ds \right]$$

ίδιο αν $x \leq y$ ...

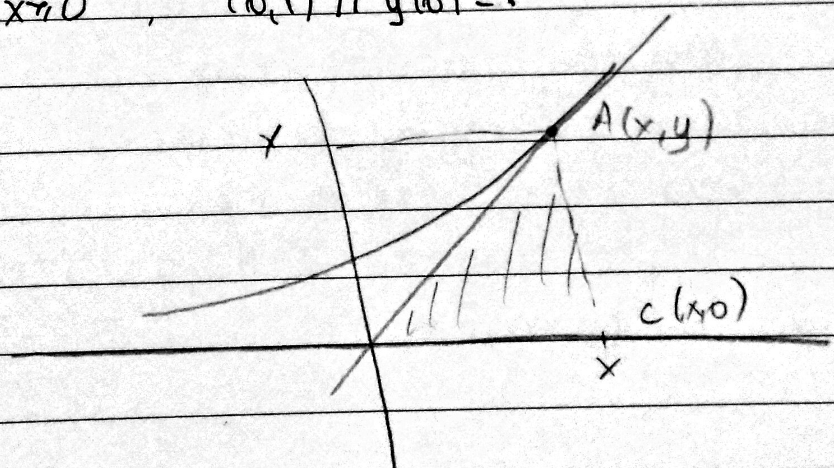
ii) $y' = \max\{x, y\}$, $y(0) = 0$, $x \geq 0$

$y' = x \quad (x \geq y)$, $x \geq \frac{x^2}{2} + c$ για να βρω το πεδίο ορισμού

$y' = y \quad (x \leq y)$

Άσκηση 4 φυλλάδιο 2

$y(x)$, $x \geq 0$, $(0,1) \,//\, y(0) = 1$



$E = \frac{1}{2} y BC' \Rightarrow 2cy' = y^2$

$y'(x) = \frac{AC}{BC} = \frac{y}{BC} \Rightarrow BC = \frac{y}{y'}$

Ασκηση 9, φυλλαδιο 2

$$\overbrace{\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^n f(n)\,dn \dots ds}^{A(t)} = \overbrace{\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,ds}^{B(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^t f(t,s)\,ds\right] = f(t,t) + \int_a^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,\partial s$$

$$A'(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int}_{n-1} f(n)\,dn \dots ds$$

$$B'(t) = \frac{1}{(n-1)!}$$

Μπορεί να υπαρχουν καποια κενά
αλλά εγραφε παρα πολυ γρηγορα και
εσβηνε κατευθειαν οποτε οτι λειπει
μπορειτε να το δειτε απο το βιβλιο.
Ευχαριστω για τη κατανοηση